Title	Partial Maintenanceを考慮したマルコフ過程での多段決定問題について (不確実性下における意思決定問題)
Author(s)	中井, 達
Citation	数理解析研究所講究録 (2011), 1734: 220-227
Issue Date	2011-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/170757
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1734 巻 2011 年 220-227

Partial Maintenanceを考慮したマルコフ過程での多段決定問題について

千葉大学教育学部　中井　達 (Tōru Nakai)
Faculty of Education, Chiba University

1　はじめに

[6] において、評価と関連する状態に関する状態をもとに、支出を決定する逐次決定問題を扱った。また、状態は支出することによって変えることが出来た。ここでは、[6] などで扱った問題を費用最小化問題に応用することを考える。

いま、自動車や電化製品などに関して問題が生じたとき、どのように対応するかを決定するモデルを考える。ここでは、製品の状態を $(0,\infty)$ によって表し、状態を表す値 s が大きくなれば製品の抱える問題が大きくなるとする。また、この状態は決定にかかわらず、マルコフ過程にしたがって状態が推移するものとする。このとき、計画期間内で費用を最小化する最適政策と最適政策にしたがったときに得られる最適値の性質について考える。また、[6] などと同様に、問題が生じたときに取った決定により状態は変化するものとするが、[6] では決定により変化する状態は、状態に対して加法的に変化するものと考えたが、ここでは乗法的に変化するものと考える。

2　多段決定問題

状態空間を $(0,\infty)$ とし、状態を表す値 s が大きくなれば状態が悪くなるとする。状態が s のとき、決定 α を取れば状態を改善することができ、新しい状態を αs とすることができる $(0<\alpha\leq 1)$。このときの費用を $C(\alpha)$ とする。すなわち、現在の状態を改善することができ、その費用は状態の改善割合に依存するものとする。$u(s)$ を最後の期の状態が s のときの終端費用とする。ここで、$u(s)$ は s に関する非減少凸関数とする。[6] では、状態が s のとき、決定 $x(\geq 0)$ により状態は $s+d(x)$ となるものとし、$d(x)$ は x に関する非減少関数とした。ここでは、状態が s のとき、決定 α を取れば状態が αs とし、乗法的に変化するものと考える。

また、状態が確率的に推移する場合を考えるときには、状態は推移法則を $\boldsymbol{P}=(p_s(t))_{s,t\in(0,\infty)}$ とするマルコフ過程にしたがって推移するものとする。

2.1　準備

始めに最適政策の性質を考えるための基本的な性質についてまとめる。

補題 1 $s\in[0,\infty)$ で定義された関数 $u(s)$ が、非減少凸関数であれば、この関数 $u(s)$

は $0<\lambda<1$ に対して、

$$u(\widehat{s}^{\lambda}\overline{s}^{1-\lambda}) \leq \lambda u(\widehat{s}) + (1-\lambda)u(\overline{s}) \tag{1}$$

となる。

補題 2 $\widehat{s}<\overline{s}$ のとき、非負関数 $u(s)$ が $0<\lambda<1$ に対して、

$$u(\widehat{s}^{\lambda}\overline{s}^{1-\lambda}) \leq \lambda u(\widehat{s}) + (1-\lambda)u(\overline{s})$$

となるならば、$\widehat{s}<\overline{s}, \widehat{s}'<\overline{s}'$ となる $\widehat{s}, \overline{s}, \widehat{s}', \overline{s}'$ に対して、

$$\frac{u(\widehat{s})-u(\overline{s})}{\log\widehat{s}-\log\overline{s}} \leq \frac{u(\widehat{s}')-u(\overline{s}')}{\log\widehat{s}'-\log\overline{s}'}$$

である。

とくに、$\widehat{s}<\overline{s}, \widehat{s}'<\overline{s}'$ で、$\widehat{s}<\widehat{s}'$ のとき $\dfrac{\widehat{s}}{\overline{s}}=\dfrac{\widehat{s}'}{\overline{s}'}$ であれば

$$\log\widehat{s}-\log\overline{s}=\log\widehat{s}'-\log\overline{s}'<0$$

だから、

$$u(\overline{s}')-u(\widehat{s}') \geq u(\overline{s})-u(\widehat{s}) \tag{2}$$

あるいは

$$u(\widehat{s})-u(\widehat{s}') \geq u(\overline{s})-u(\overline{s}')$$

である。

補題 3 非減少関数 $f(s)$ が、$0<\lambda<1$ のとき、(1) 式を満たせば、$f(s)$ は s に関する非減少凸関数である。

2.2 対数正規分布

確率変数 Y を正規分布 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ とするとき、$X:=e^Y$ で定義される確率変数を対数正規分布といい、$x>0$ のとき、事象 $\{X\leq x\}$ と事象 $\{Y\leq\log x\}$ は等しいので、$Pr(X\leq x)=Pr(Y\leq\log x)$ より、分布関数は

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{\log x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

であり、確率密度関数 $f_X(x)$ は

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\dfrac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

である。また、正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の密度関数を $\phi(x)$ とすれば、$f_X(x)=\frac{\phi(\log x)}{x}$ なので、$f_X(\alpha x)=\dfrac{\phi(\log\alpha x)}{\alpha x}=\dfrac{\phi(\log\alpha+\log x)}{\alpha x}$ となる。

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

ところで、$X_1 = e^{Y_1}, X_2 = e^{Y_2}$ を対数正規分布にしたがう確率変数とする。Y_1, Y_2 が正規分布にしたがうので、$Y_1 + Y_2$ もまた正規分布である。$Y_1, Y_2, Y_1 + Y_2$ の密度関数をそれぞれ $\phi_{Y_1}(x), \phi_{Y_2}(x), \phi_{Y_1+Y_2}(x)$ すれば、$Pr(X_1X_2 \leq x) = Pr(Y_1 + Y_2 \leq \log x)$ だから、X_1X_2 の密度関数 $f_{X_1X_2}(x)$ は

$$f_{X_1X_2}(x) = \frac{\phi_{Y_1+Y_2}(\log x)}{x}$$

となり、確率変数 X_1X_2 もまた対数正規分布となっている。

つぎに、確率変数 X_s を

$$F_{X_s}(x) = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \log s)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$f_{X_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - \log s)^2}{2\sigma^2}}$$

と定義すれば、$\mu = \log s$ だから

$$E[X_s] = se^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

である。よって、

$$p_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma s_2} e^{-\frac{(\log t - \log s)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\phi_{\log s, \sigma_2^2}(\log t)}{t}$$

とすることもできる。

2.3 Partial Maintenance を考慮した多段決定問題 I

状態空間を $(0, \infty)$ とし、状態が s のとき、決定 α を取れば状態を改善することができ、新しい状態を αs とすることができる $(0 < \alpha \leq 1)$。このときの費用を $C(\alpha)$ とすし、$u(s)$ を最後の期の状態が s のときの終端費用とする。ここで、$u(s)$ は s に関する非減少凸関数とする。このとき計画期間内の総費用を最小化する問題を考える。また、状態が確率的に推移しない場合を始めに考える。

状態が s のとき、n 期間にわたって決定を行い総費用を最小にする問題で、最適政策にしたがったときに得られる総費用を $w_n(s)$ とすれば、最適性の原理よりつぎの最適方程式が得られる。

$$w_n(s) = \min_{0<\alpha\leq 1} \{-C(\alpha) + w_{n-1}(\alpha s)\}, \tag{3}$$

ここで

$$w_1(s) = \min_{0<\alpha\leq 1} \{C(\alpha) + u(\alpha s)\}$$

とする。

状態が s のとき、decision-maker はシステムを維持するために、状態を改善する割合 α を選択し $(0 < \alpha \leq 1)$、費用 $C(\alpha)$ を支払って状態 s を αs とすることができる。この費用 $C(\alpha)$ は α に関する非増加関数で (1) 式を満足すると仮定し、$C(1) = 0$ とする。たとえば、$C(\alpha) = -\log \alpha$ はこの条件を満たす。また、$u(s)$ は s に関する非減少凸関数と仮定したことから、補題 1 より、$u(s)$ は (1) 式を満足する。このとき、つぎのような性質が成り立つ。

補題 4 $w_n(s)$ は、s に関する非減少関数である。

補題 5 $w_n(s)$ を

$$w_n(s) = \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + w_{n-1}(\alpha s)\}, \tag{4}$$

ただし、

$$w_1(s) = \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + u(\alpha s)\}.$$

で定義するとき、$w_n(s)$ は、補題 1 の (1) 式を満たす。

注 1 e^x が凸関数だから、

$$E[X_1X_2] = E[e^{Y_1}e^{Y_2}] = E[e^{Y_1+Y_2}] \leq e^{E[Y_1]+E[Y_2]} = E[X_1]E[X_2]$$

$c(x)$ を凸で $c(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq \lambda c(x) + (1-\lambda)c(y)$ を仮定すれば、*Jensen* の不等式より

$$E[c(X_{\hat{s}^\lambda \bar{s}^{1-\lambda}})] \leq c(E[X_{\hat{s}^\lambda \bar{s}^{1-\lambda}}]) \leq \lambda E[c(X_{\hat{s}})] + (1-\lambda)E[c(X_{\bar{s}})]$$

となる。したがって、$w_n(s) = E_{X_s}[w_n(s|X_s)]$ についても、同様となる。

補題 6 $\alpha_n(s)$ は s に関して減少する。

補題 7 $\alpha_n(s)$ は n に関して減少する。

補題 8 $C(\alpha)$ が凸関数で、$u(s)$ が s に関する非減少凸関数とすれば、

$$f(s) = \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + u(\alpha s)\}$$

も、s に関する非減少凸関数である。

3 Stochastic Inequality

3.1 Stochastic Order Relation

定義 1 確率密度関数 $f(x)$ および $g(x)$ を持つ 2 つの確率変数 X と Y を考える。$x \geq y$ となる任意の x と y に対して、$f(y)g(x) \leq f(x)g(y)$ となるとき、X は Y より *likelihood ratio* の意味で大きいといい、$X \geq_{LRD} Y$ と表す。

定義 2 確率密度関数 $f(x)$ および $g(x)$ を持つ 2 つの確率変数 X と Y を考え、これらの確率変数の分布関数を $F(x)$ と $G(x)$ とする。$x \geq y$ となる任意の x と y に対して、$\overline{F}(y)\overline{G}(x) \geq \overline{F}(x)\overline{G}(y)$ となるとき、X は Y より *hazard rate* の意味で大きいといい、$X \geq_{HR} Y$ と表す。ここで、$\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ である。

$t^* = \sup\{t : \overline{F}(t) > 0\}$ とするとき、mean residual life function をつぎのように定義する。

$$m(t) = \begin{cases} E[X - t|X > t], & \text{for} \quad \mathrm{t < t^*} \\ 0 & \quad\quad \text{otherwise} \end{cases}$$

定義 3 確率密度関数 $m_X(t)$ および $m_Y(t)$ を持つ 2 つの確率変数 X と Y を考える。任意の t に対して、$m_X(t) \geq m_Y(t)$ ならば、X は Y より *the mean residual life* の意味で大きいといい、$X \geq_{MRL} Y$ と表す。

補題 9 2 つの確率変数 X と Y に対して、$X \geq_{LRD} Y$ ならば $X \geq_{HR} Y$ であり、$X \geq_{HR} Y$ ならば $X \geq_{MRL} Y$ である。

X と Y を 2 つの確率変数とする。

(1) $X \geq_{ICX} Y \Longleftrightarrow$ 任意の非減少凸関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ である。(increasing convex order)
(2) $X \geq_{ICV} Y \Longleftrightarrow$ 任意の非減少凹関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ である。(increasing concave order)
(3) $X \geq_{DCX} Y \Longleftrightarrow$ 任意の非増加凸関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ である。(decreasing convex order)

補題 10 2 つの確率変数 X と Y に対して、$X \geq_{MRL} Y$ ならば $X \geq_{ICX} Y$ である。

とくに、マルコフ過程の推移法則 $\boldsymbol{P} = (p_s(t))_{s,t\in(0,\infty)}$ について、任意の $s < s', t \leq t'$ および $u < v$ となる s, s', t, t', u, v に対して $p_u(s)p_v(t') - p_u(t)p_v(s') \geq p_v(s)p_u(t') - p_v(t)p_u(s')$ とすれば、つぎのような性質を持つ。

補題 11 $s < s'$ ならば、s に関する非増加凸関数 $u(s)$ に対して、$\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt \leq \int_0^\infty p_{s'}(t)u(t)dt$ である。

3.2 Stocahstic Convexity and Concavity

Shaked and Shanthikumar [7] にしたがって、つぎのような順序関係を考える。$\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ を s をパラメータとする確率変数列とする。

(1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SI(stocahstically increasing)$\Longleftrightarrow$ 任意の非減少 (増加) 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の非減少 (増加) 関数である。
(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICX(stocahstically increasing and convex)$\Longleftrightarrow$ 任意の非減少 (増加) 凸関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の非減少 (増加) 凸 関数である。

(3) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICV(stocahstically increasing and concave)$\Longleftrightarrow$ 任意の非減少 (増加) 凹関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の非減少 (増加) 凹関数である。

つぎのような性質が成り立つ。

補題 12 (1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICX*$\Longleftrightarrow\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SI* で、任意の x に対して、$\int_x^\infty \overline{F}_{X(s)}(y)dy$ が、s の非減少 (増加) 凸関数である。

(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICV*$\Longleftrightarrow\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SI* で、任意の x に対して、$\int_{-\infty}^x F_{X(s)}(y)dy$ が、s の非増加 (減少) 凸関数である。

$s_1 \le s_2 \le s_3 \le s_4$ で $s_1 + s_4 = s_3 + s_2$ のとき、$X_i = X(s_i)$ とおく $(i = 1, 2, 3, 4)$。$(s_4 - s_3 = s_2 - s_1)$

(1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICX(sp)(stocahstically increasing and convex in sample path sense)$\Longleftrightarrow\max\{X_2, X_3\} \le X_4$ であり (a.s.)、$X_2 + X_3 \le X_1 + X_4$ である。

(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICV(sp)(stocahstically increasing and concave in sample path sense)$\Longleftrightarrow X_1 \le \max\{X_2, X_3\}$ であり (a.s.)、$X_2 + X_3 \ge X_1 + X_4$ である。

補題 13 (1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICX(sp)* ならば、*SICX* である。

(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICV(sp)* ならば、*SICV* である。

例 1 $X(\mu)$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ とする。$\{X(\mu)|\mu \in (-\infty, \infty)\}$ は *SICX(sp)* であり *SICV(sp)* である。

補題 14 (1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICX(sp)* であり、$u(\cdot)$ を非減少凸関数 とする。このとき、$\{u(X(s))|s \in (-\infty, \infty)\}$ もまた *SICX(sp)* である。

(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が *SICV(sp)* であり、$u(\cdot)$ を非減少凹関数 とする。このとき、$\{u(X(s))|s \in (-\infty, \infty)\}$ もまた *SICV(sp)* である。

例 2 $X(\mu)$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ とする。$Y(\mu) = e^{X(\mu)}$ とおけば、$u(x) = e^x$ が非減少凸関数 だから $\{Y(\mu)|\mu \in (-\infty, \infty)\}$ は *SICX(sp)* である。したがって、$Y(\mu)$ は対数正規分布であり、*SICX(sp)* であり、*SICX* である。

3.3 Partial Maintenance を考慮した多段決定問題 II

状態が推移法則 $\boldsymbol{P} = (p_s(t))_{s,t\in(0,\infty)}$ のマルコフ過程にしたがって推移する場合を考える。計画期間が n で、各期ごとの決定を $0 < \alpha \le 1$ とする。このとき、最適に振る舞ったときの状態に対する期待利得を $w_n(s)$ とすれば、状態がマルコフ過程にしたがって推移するから、最適方程式はつぎのようになる。

$$v_n(s) \;=\; \min_{0<\alpha\le 1}\{-C(\alpha) + \int_0^\infty p_{\alpha s}(t)v_{n-1}(t)dt\}, \tag{5}$$

ただし、

$$v_1(s) = \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + \int_0^\infty p_{\alpha s}(t)u(t)dt\}$$

とする。

補題 15 $v_n(s)$ は、s に関する非減少関数である。すなわち、$s < s'$ ならば、$v_n(s) \geq v_n(s')$ である。

ここで、推移法則 $(p_s(t))_{0\leq s\leq 1}$ に対して、つぎの仮定を設ける。また、$T(s)$ を状態が s のときつぎの状態を表す確率変数とする。

仮定 1 t に関する非減少凸関数を $u(t)$ とすれば、$\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt$ は s に関する非減少凸関数となっている。すなわち、確率変数列 $\{T(s)|s \in (0,\infty)\}$ は、*SICX* である。

補題 16 $v_n(s)$ は、s に関する凸関数である。

性質 1 計画期間が n であり、状態が s のときの、最適な決定を $\alpha_n^*(s)$ とする。このとき、$s \leq s'$ ならば、$\alpha_n^*(s) \geq \alpha_n^*(s')$ である。$\alpha_n^*(s)$ は、s に関して減少する。

次の仮定は、性質 2 を示すために必要な仮定である。

仮定 2 推移法則 $(p_s(t))_{0\leq s\leq 1}$ は、つぎの性質を満たす。t に関する非減少凸関数を $u(t)$ とすれば、$\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt - u(s)$ は、s に関する増加関数である。

推移法則 $(p_s(t))_{0\leq s\leq 1}$ が、この仮定を満たせば、$s < s'$ のとき

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)u(t)dt - u(s') \geq \int_0^\infty p_s(t)u(t)dt - u(s)$$

または、

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)u(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)u(t)dt \geq u(s') - u(s),$$

となり、このことから補題 18 と補題 17 が導かれ、これらの補題から性質 2 が示される。

補題 17 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$v_n(s') - v_n(s) \geq \int_0^\infty p_{s'}(t)v_{n-1}(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_{n-1}(t)dt \tag{6}$$

である。

ところで、仮定 2 より、$v_n(s)$ が s に関する凹関数だから、

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)v_n(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_n(t)dt \geq v_n(s') - v_n(s) \tag{7}$$

となる。したがって、(6) 式と (7) 式より

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)v_n(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_n(t)dt \geq \int_0^\infty p_{s'}(t)v_{n-1}(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_{n-1}(t)dt$$

となり、つぎの性質が成り立つ。

補題 18 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)v_{n-1}(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_{n-1}(t)dt \leq \int_0^\infty p_{s'}(t)v_n(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)v_n(t)dt$$

あるいは、

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)(v_n(t) - v_{n-1}(t))dt \geq \int_0^\infty p_s(t)(v_n(t) - v_{n-1}(t))dt$$

である。

これらの性質を用いればつぎの性質が成り立つ。

性質 2 計画期間が n で、状態が s のときの、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $n \geq 1$ に対して、$\alpha_{n-1}^*(s) \geq \alpha_n^*(s)$ である。

参考文献

[1] F. De Vylder, Duality Theorem for Bounds in Integrals with Applications to Stop Loss Premiums, *Scandinavian Actuarial Journal*, 129–147, (1983).

[2] M. Kijima and M. Ohnishi, Stochastic Orders and Their Applications in Financial Optimization, *Mathematical Methods of Operations Research*, **50**, 351–372, (1999).

[3] Monahan, G. E., Optimal selection with alternative information. Naval Res. Logist. Quart. 33 (1986), 293–307.

[4] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov process, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 230–240, (1986).

[5] T. Nakai, A Sequential Expenditure Problem for Public Sector Based on the Outcome, *Recent Advances in Stochastic Operations Research* (Eds. T. Dohi, S. Osaki and K. Sawaki), World Scientific Publishing, 277–295, 2007.

[6] T. Nakai, A Sequential Decision Problem based on the Rate Depending on a Markov Process, *Recent Advances in Stochastic Operations Research 2* (Eds. T. Dohi, S. Osaki and K. Sawaki), World Scientific Publishing, 11–30, 2009.

[7] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G., *Stochastic Orders and Their Applications* (Probability and mathematical statistics : a series of monographs and textbooks), Academic Press, Boston, Massachusetts, 1994.